

Korrelationen in Finanzmärkten: Bestimmung des realen Informationsgehalts und einer hierarchischen Struktur

Hergen Schultze
*Institut für Theoretische Physik der
Georg-August-Universität zu Göttingen*
schultze@theorie.physik.uni-goettingen.de

Seminarvortrag, gehalten am 20. April 2000

Zusammenfassung

Die Analyse der Korrelationen von Wertpapierkursen hat für die Berechnung eines Portfolios mit minimalem Risiko praktische Relevanz. Zum optimalen Portfolio tragen dabei die kleinsten Eigenwerte der Korrelationsmatrix am meisten bei. Ein Vergleich der empirischen Werte, gewonnen aus Zeitreihen der Kurse, mit der Hypothese, die Kursschwankungen seien unabhängig und gleichverteilt, führt zu dem Ergebnis, dass die kleinen Eigenwerte vom Rauschen dominiert sind und nur in den großen Eigenwerten Information kodiert ist. Die Eigenwertanalyse führt auf die Vermutung, dass mit Hilfe der empirischen Matrix auf dem Raum der Unternehmen ein Abstandsbegriff sinnvoll definiert werden kann, welches an einem Beispiel auch numerisch überprüft ist. Die Metrik führt auf einen minimalen Graphen, der eine hierarchische Struktur darstellt, indem er die Nachbarschaftsverhältnisse der Unternehmen quantitativ erfasst und selbst ökonomisch interpretiert werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Einsatz von Korrelationsmatrizen im Risikomanagement	2
Informationsgehalt von empirischen Korrelationsmatrizen	5
Hierarchische Struktur von Wertpapieren	8

Einsatz von Korrelationsmatrizen im Risikomanagement

Einleitend möchte ich darlegen, welche Rolle Korrelationsmatrizen im Risikomanagement einnehmen. Dafür werden die notwendigen grundlegenden Begriffe der Finanztheorie definiert und veranschaulicht [1]. Am Ende dieses Abschnittes werde ich die Frage nach dem Informationsgehalt motivieren, deren Beantwortung schließlich auf eine hierarchische Struktur führt.

Grundlegende Definitionen

Wir betrachten einen Anleger, der eine Menge von Wertpapieren – ein *Portfolio* – hält. Die absolute Größe des Portfolios ist nicht festgelegt, es werden lediglich die *relativen Anteile* $\{x_i\}$ des Portfolios angegeben. Dabei ist x_i der Bruchteil, der in Wertpapier i gehalten wird.

Sei $S_i(t)$ der Wert (Preis) des i -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt t und 0 eine Bezugszeit. Dann ist die *Rendite* definiert als der Logarithmus der relativen Preisänderung bezüglich eines Ausgangskurses:

$$R_i(t) = \log \left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)} \right) = \log \left(\prod_{\ell=1}^t \frac{S_i(\ell)}{S_i(\ell-1)} \right) = \sum_{\ell=1}^t \underbrace{\log \left(\frac{S_i(\ell)}{S_i(\ell-1)} \right)}_{\delta R_i(\ell)} \quad (1)$$

Die Zeit wird üblicherweise diskretisiert, z. B. in Tage. Die tägliche Rendite entspricht einer Verzinsung des Preises:

$$S_i(\ell) = S_i(\ell-1) e^{\delta R_i(\ell)} \quad (2)$$

Der Grund für die Angabe der relativen Werte gegenüber den absoluten liegt darin, dass in einem einfachen Modell der Finanzmärkte angenommen wird, dass die relativen Kursänderungen (und damit $\delta R_i(t)$) einem Random Walk (ev. mit Drift) unterworfen sind und sich daher die Rendite als Zufallsvariable eignet, denn die Vergrößerung durch Aufsummieren von einzelnen Schritten ergibt wieder einen Random Walk.

Als die *erwartete Rendite* \overline{R}_i für das Wertpapier i bezeichnet man den Mittelwert der fluktuierenden Rendite $R_i(t)$, ermittelt über einen bestimmten Zeitraum T . Die erwartete Rendite eines Portfolios \overline{R}_P , bestehend aus N verschiedenen Wertpapieren, errechnet sich damit wie folgt:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^N x_i \overline{R}_i \quad (3)$$

Das *Risiko*, das mit der erwarteten Rendite verbunden ist, drückt man durch die Varianz σ_P^2 der Rendite R_P , hier *Volatilität* genannt, aus. Sie kann wie folgt

geschrieben werden:

$$\sigma_P^2 = \overline{(R_P(t) - \overline{R_P})^2} = \overline{\left(\sum_{i=1}^N x_i (R_i(t) - \overline{R_i}) \right)^2} = \sum_{i,j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j \quad (4)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \overline{(R_i(t) - \overline{R_i}) (R_j(t) - \overline{R_j})} \quad (5)$$

Die symmetrische Matrix σ_{ij} heißt *Kovarianzmatrix*. Dabei stehen auf der Diagonalen die Volatilitäten der einzelnen Wertpapiere ($\sigma_{ii} = \sigma_i^2$). Es ist nützlich, die Kovarianzmatrix auf diese Volatilitäten zu normieren. Man spricht dann von der *Korrelationsmatrix* C_{ij} gemäß:

$$C_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (6)$$

Sie liegen im Bereich -1 (für total antikorrelierte Wertpapiere) bis $+1$ (für total korrelierte, wie z. B. auf der Diagonalen).

Wir schätzen nun die Volatilität des Portfolios für eine große Anzahl von darin enthaltenen Wertpapieren ab ($N \gg 1$). Dieser Fall ist der von praktischer Relevanz. Wir schreiben Gleichung 4 um und betrachten die Volatilitäten der einzelnen Wertpapiere und die Kovarianzen zwischen ihnen getrennt und nehmen an, dass in alle Wertpapiere in etwa zu gleichen Anteilen investiert wird, d. h. $x_i \approx 1/N$.

$$\sigma_P^2 = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j: i \neq j} x_i \sigma_{ij} x_j \approx \underbrace{\frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^2}_{\langle \sigma_i^2 \rangle} + \frac{(N-1)}{N} \underbrace{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j: i \neq j} \sigma_{ij}}_{\langle \sigma_{ij} \rangle} \quad (7)$$

Der Beitrag der einzelnen Volatilitäten verschwindet demnach mit $\mathcal{O}(1/N)$, der Beitrag der Kovarianzen bleibt von $\mathcal{O}(1)$. Das Ergebnis bedeutet praktisch, dass *nicht* das individuelle Risiko der Wertpapiere, *sondern* die Korrelationen zwischen den Wertpapieren für die Risikoabschätzung eines großen Portfolios betrachtet werden müssen.

Mit Hilfe des Wissens über die Korrelationen zwischen den Wertpapieren, die ihrerseits (wie weiter unten beschrieben) aus empirische Daten gewonnen werden müssen, lässt sich das Risiko des Portfolios, d. h. die Volatilität, minimieren. Das möchte ich im Folgenden an Hand eines Beispiels darstellen.

Bsp: Portfolio aus zwei Wertpapieren

Wir betrachten zur Vereinfachung ein Portfolio, das nur aus zwei Wertpapieren a und b besteht. Die erwartete Rendite und die Volatilität des Portfolios errechnen

sich in diesem Fall wie folgt (siehe Gleichungen 3 und 4):

$$\overline{R}_P = x_a \overline{R}_a + (1 - x_a) \overline{R}_b \quad (8)$$

$$\sigma_P^2 = x_a^2 \sigma_a^2 + (1 - x_a)^2 \sigma_b^2 + 2 x_a (1 - x_a) C_{ab} \sigma_a \sigma_b \quad (9)$$

Wir fassen die beiden Gleichungen als eine durch x_a parametrisierte Kurve im $(\overline{R}_P, \sigma_P)$ -Raum auf. Für die beiden Extremfälle totaler Korrelation ($C_{ab} = +1$) und totaler Antikorrelation ($C_{ab} = -1$) findet man lineare Zusammenhänge, alle anderen (realistischen) Fälle führen auf Kurven, die im Diagramm zwischen den beiden Extremen liegen. Ein konkretes Beispiel zeigt Abbildung 1. Hier enthält das Portfolio ein Wertpapier mit geringem und eines mit höherer erwarteter Rendite, wobei das letztere auch mit einem höheren Risiko verbunden ist.

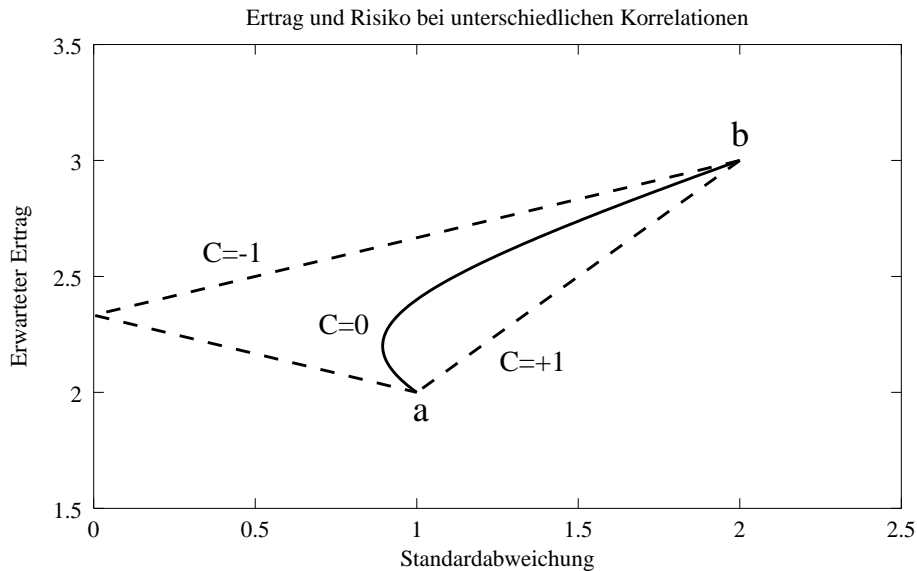


Abbildung 1: Die Punkte a und b zeigen \overline{R}_P und σ_P für rein in ein Wertpapier angelegte Portfolios. Die gestrichelten Linien zeigen Werte für $0 < x_a < 1$ bei totaler Korrelation ($C = +1$) und Antikorrelation ($C = -1$). Die durchgezogene Linie zeigt verschiedene Portfolios bei einer mittleren Korrelation zwischen den Wertpapieren (hier $C = 0$).

Für stark anti- oder auch schwach korrelierte Wertpapiere lässt sich ein Portfolio finden, das das Risiko minimiert, und zwar bei einem Wert, der unter der Volatilität der einzelnen Anlagen liegt. Errechnen kann man das Portfolio mit minimalem Risiko in diesem Fall einfach durch Ableiten der Gleichung 9 nach dem Parameter x_a . Die Lösung x_a^{\min} , die Aufteilung des Portfolios in die verschiedenen Wertpapiere, hängt dabei vom Korrelationskoeffizienten C_{ab} ab. Man ist demnach bei der Risikominimierung auf die empirischen Daten der Korrelationsmatrix angewiesen.

Minimales Risiko und empirische Daten

Die Aufgabe, das Portfolio mit minimalem Risiko zu finden, möchte ich nun formalisieren. Von dieser Stelle an wird statt σ_{ij} die normierte Korrelationsmatrix C_{ij} verwendet. Das minimale Risiko soll unter der Nebenbedingung konstanter erwarteter Rendite $\overline{R_P}$ ermittelt werden. Die Bestimmungsgleichungen dafür lassen sich mit einem Lagrange-Multiplikator μ wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i C_{ij} x_j - \mu \sum_i x_i \overline{R}_i \right) = 0 \quad (10)$$

Die Gleichung wird formal durch die Inverse C_{ij}^{-1} der Korrelationsmatrix gelöst:

$$x_i^{\min} = \mu \sum_j C_{ij}^{-1} \overline{R}_j \quad (11)$$

Wichtig an diesem Zusammenhang ist die Feststellung, dass das Portfolio mit minimalem Risiko wegen der Inversen sein *größtes Gewicht bei den kleinsten Eigenwerten* der Korrelationsmatrix C_{ij} hat, vorausgesetzt, die Einträge in \overline{R}_j sind von der gleichen Größenordnung.

In der Praxis werden die $N(N-1)/2$ Einträge der Matrix mit Hilfe von diskreten Zeitreihen der relativen Preisänderungen $\delta R_i(t) = \log(S(t)/S(t-1))$ (siehe Gleichung 1) der N Wertpapiere über die Dauer T (T : Anzahl der Zeitschritte, d. h. meistens Tage) ermittelt.

$$C_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta R_i(t) \delta R_j(t) \quad (12)$$

Hier soll eine Normierung so gewählt werden, dass die Volatilität der Preisänderungen konstant gleich eins ist: $\sigma^2 = T^{-1} \sum_t \delta R_i(t)^2 = 1$.

Ist T nicht wesentlich größer als N , so erwarten wir, dass die Daten schon wegen der Endlichkeit der Zeitreihe *verrauscht* sein werden. In der Praxis ist $T \propto \mathcal{O}(N)$, wovon im Folgenden auch ausgegangen werden soll. Zu dieser Quelle von Zufälligkeit kommen natürlich noch die Zufälligkeiten durch das Verhalten der Händler. Bevor nun diese verrauschten empirischen Daten in einem Lösungsalgorithmus für das Portfolio minimalen Risikos verwendet werden, lohnt sich die Frage: *Wieviel von den Daten ist zufällig und welche der Daten sind es?* Dies soll im nächsten Abschnitt untersucht werden.

Informationsgehalt von empirischen Korrelationsmatrizen

Die Analyse der Korrelationskoeffizienten C_{ij} basiert auf einer einfachen Annahme, der sogenannten *Null-Hypothese*: **Die Koeffizienten der Zeitreihe, die**

relativen Preisänderungen $\delta R_i(t)$, sind *unabhängige* und *gleichverteilte* Zufallsvariablen. Damit sind die Koeffizienten der Korrelationsmatrix, die Summen aus Produkten von unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen, *unabhängige* und *Gauß-verteilte* Zufallsvariablen.

Wie oben erwähnt, sind N und T große Zahlen der gleichen Größenordnung. Die Theorie solch großer Matrizen, deren Einträge stark verrauscht sind, wurde im Zusammenhang mit der Entschlüsselung der Kernspektren und der zugrunde liegenden Bindungsverhältnisse erfolgreich angewendet [2]. Auf die Ergebnisse der Zufallsmatrix-Theorie möchte ich mich im Rahmen dieses Vortrags ohne Herleitung beziehen. Untersucht werden soll die Dichte $\rho_C(\lambda)$ der Eigenwerte λ von C .

$$\rho_C(\lambda) = \frac{1}{N} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \quad (13)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$ mit $Q = T/N \geq 1$ ist die Eigenwertdichte der Matrix C exakt bekannt [3]:

$$\rho_C(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{\max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{\min})}}{\lambda} \quad (14)$$

$$\lambda_{\min}^{\max} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} \pm \frac{2}{\sqrt{Q}} \right)$$

Wichtig an diesem Zusammenhang ist zum einen, dass neben Q kein weiterer Parameter eingeht (die Volatilität der Preisschwankungen σ^2 wurde auf eins normiert) und zum anderen, dass die Eigenwertdichte auf ein Intervall $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ beschränkt ist. Zu den Rändern hin fällt die Verteilung i. A. auf Null ab. Nahe der unteren Intervallgrenze besitzt sie ein scharfes Maximum. Der spezielle Fall $Q = 1$ soll hier nicht betrachtet werden.

Wir vergleichen nun die soeben dargestellte Null-Hypothese völlig zufälliger Preisschwankungen mit empirischen Daten. Die Abbildung 2 zeigt die Ergebnisse der Untersuchung des Standard and Poor's 500 (S&P 500) Indexes [3]. Numerisch ermittelt wurde die Eigenwertdichte einer Korrelationsmatrix aus $N = 406$ Wertpapieren, gemittelt über einen Zeitraum von $T = 1309$ Tagen. Das entspricht einem Wert von $Q = 3.22$.

Die zu vergleichende theoretische Vorhersage enthält keinen freien Parameter mehr. Man stellt nun fest, dass die Hypothese rein zufälliger Preisschwankungen mit den empirischen Daten zunächst nicht konsistent ist. Die entscheidene Abweichung betrifft die obere Grenze der Verteilung: Der größte Eigenwert ist etwa 25 mal größer als die erwartete obere Schranke (gezeigt im kleinen Bild). Man stellt fest, dass der zum größten Eigenwert zugehörige Eigenvektor etwa gleich große Einträge für jedes Wertpapier besitzt (also das gesamte Angebot enthält) und identifiziert ihn deshalb mit dem *Markt*. Nimmt man nun an, nur das orthogonale Komplement des Marktes sei zufällig verteilt, so erhält man die in der

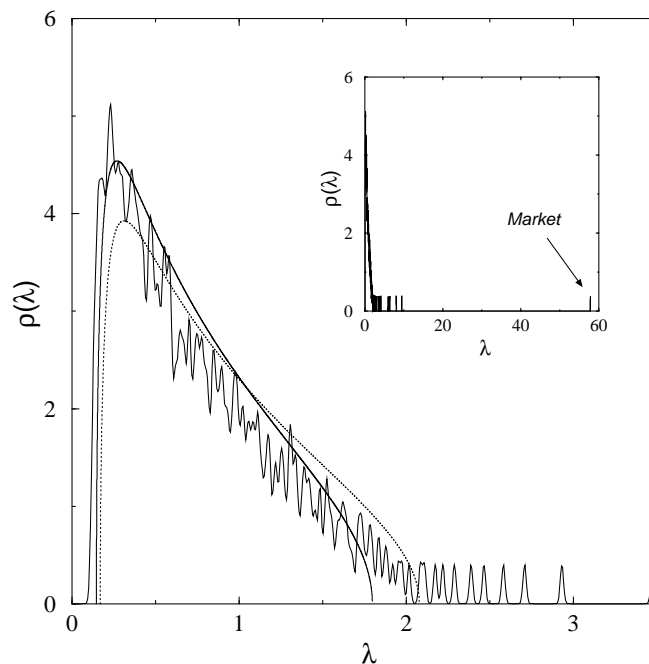


Abbildung 2: Empirische Eigenwertdichte des S&P 500-Indexes verglichen mit der Null-Hypothese für einen berechneten Wert von σ^2 (gepunktet) und einen gefitteten (durchgezogen). Das kleine Bild zeigt den gesamten empirischen Wertebereich. (Abbildung aus [3])

großen Abbildung gezeigten Kurven. Die gepunktete Linie gehört zur berechneten Volatilität des orthogonalen Komplements¹ von $\sigma^2 = 0.85$, die durchgezogene Linie zu einer gefitteten Volatilität von $\sigma^2 = 0.74$ des effektiv zufälligen Teils der Korrelationsmatrix. Ein Anteil von etwa 0.94 der Eigenwerte wird durch die so erweiterte Null-Hypothese beschrieben, die anderen (höchsten) Eigenwerte liegen außerhalb des vorhergesagten Intervalls.

Es ist plausibel, aber nicht bewiesen, dass in diesen Eigenwerten, die etwa 0.06 der Verteilung und 0.26 der Volatilität ausmachen, die Information kodiert ist und der Rest auf zufälligen Schankungen beruht. Diese Aussage bekommt besonderes Gewicht, wenn wir uns daran erinnern, dass die kleinsten Eigenwerte der Korrelationsmatrix den größten Anteil zur Lösung für das Portfolio mit minimalem Risiko beitragen (siehe Gleichung 11). In bisherigen Standardlösungsverfahren für das optimale Portfolio wird jedoch üblicherweise die gesamte Matrix verwendet.

Die Analyse der Eigenvektoren, die auf ein vergleichbares Ergebnis führt, möchte ich in diesem Rahmen nicht besprechen [3]. Andere Analysen empirischer

¹Sei \tilde{C} die Korrelationsmatrix im Eigensystem. Dann gilt wegen der Normierung für die Spur: $N = \text{Tr } C = \text{Tr } \tilde{C} = \sum_j \lambda_j$. Für die Korrelationsmatrix des orthogonalen Komplements \hat{C} gilt dann $\text{Tr } \hat{C} = N - \lambda_{\max} \Rightarrow \sigma^2 = \langle \hat{C} \rangle = 1 - \lambda_{\max}/N$.

Korrelationsmatrizen von Finanzmärkten zeigen nicht nur bei großen, sondern auch bei sehr kleinen Eigenwerten Abweichungen von der Null-Hypothese [4]. Diese Abweichungen legen den Schluss nahe, dass die empirischen Matrizen zu einer speziellen Klasse gehören, in der eine *Metrik* auf dem Raum der Preisschwankungen, d. h. ein *Abstand zwischen zwei Unternehmen*, definiert werden kann. Dass man solch eine Metrik tatsächlich findet, und wie man mit ihrer Hilfe eine Hierarchie der Unternehmen gewinnen kann, möchte ich im nächsten und letzten Teil besprechen.

Hierarchische Struktur von Wertpapieren

Wir wählen eine Metrik, d. h. einen Abstand $d(i, j)$ zwischen dem Unternehmen i und j , und prüfen die drei Axiome der Euklidischen Metrik [5]. Der Abstand sei einfach definiert durch:

$$d(i, j) = 1 - C_{ij}^2 \quad (15)$$

Die einzelnen Axiome sind erfüllt, wie im Folgenden begründet:

1. $d(i, j) \geq 0$ mit $d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j$ ist erfüllt, da $C_{ij} \in [-1, 1]$ und der Abstand nur dann verschwindet, wenn die beiden Wertpapiere total (anti-)korreliert sind. Das bedeutet aber, dass sie den selben Preisverlauf besitzen und somit auf dem Markt nicht voneinander zu unterscheiden sind.
2. $d(i, j) = d(j, i)$ folgt direkt aus der Symmetrie der Korrelationsmatrix.
3. $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$ (Dreiecksungleichung) wurde numerisch an zwei verschiedenen Aktienindizes überprüft [5].

Zur Darstellung der Abstandsverhältnisse verwenden wir einen *Graphen*. Dieser besteht aus N Knoten (Unternehmen) und $N(N - 1)/2$ Kanten (Abständen) mit den Längen $d(i, j)$. Die Graphentheorie wird in der Physik der kondensierten Materie (z. B. bei Gläsern oder Polymeren) angewendet. Zur übersichtlicheren Darstellung und Interpretation des Graphes der Unternehmen bildet man den sogenannten *minimalen Spannbaum*. Einen Spannbaum erhält man, indem man so viele Kanten entnimmt, dass keine Schleifen mehr im Graphen, jedoch weiter alle Knoten miteinander verbunden sind. Die Eigenschaft, keine Schleifen zu besitzen, macht den Graphen zu einem Baum. Der minimale Spannbaum ist nun derjenige mit minimaler Summe von Kantenlängen (Abständen).

Der minimale Spannbaum enthält nun die kürzesten, und damit im Sinne der Korrelationen der Unternehmen auf dem Finanzmarkt die relevantesten, Verbindungen. Der Baum lässt sich nun direkt als eine Repräsentation der ökonomischen Verhältnisse interpretieren. Was man darunter verstehen kann, möchte ich am Beispiel des Dow Jones Industrial Average (DJIA) zeigen.

Analysiert wurden die Korrelationskoeffizienten bezüglich $N = 30$ Wertpapieren, die aus einer Zeitreihe der Dauer von ungefähr $T = 2250$ Tagen (keine genaue Angabe in der Literatur) ermittelt wurden [5]. Abbildung 3 zeigt den minimalen Spannbaum dieser Unternehmen. Die großen Buchstaben bezeichnen die Unternehmen (TIC Symbole). Die Farben der Kanten symbolisieren unterschiedliche Abstände in der Reihenfolge gelb, grün, türkis, cyan, blau und violett mit zunehmenden Abständen von $d(i, j) = 0.65$ bis 0.95.

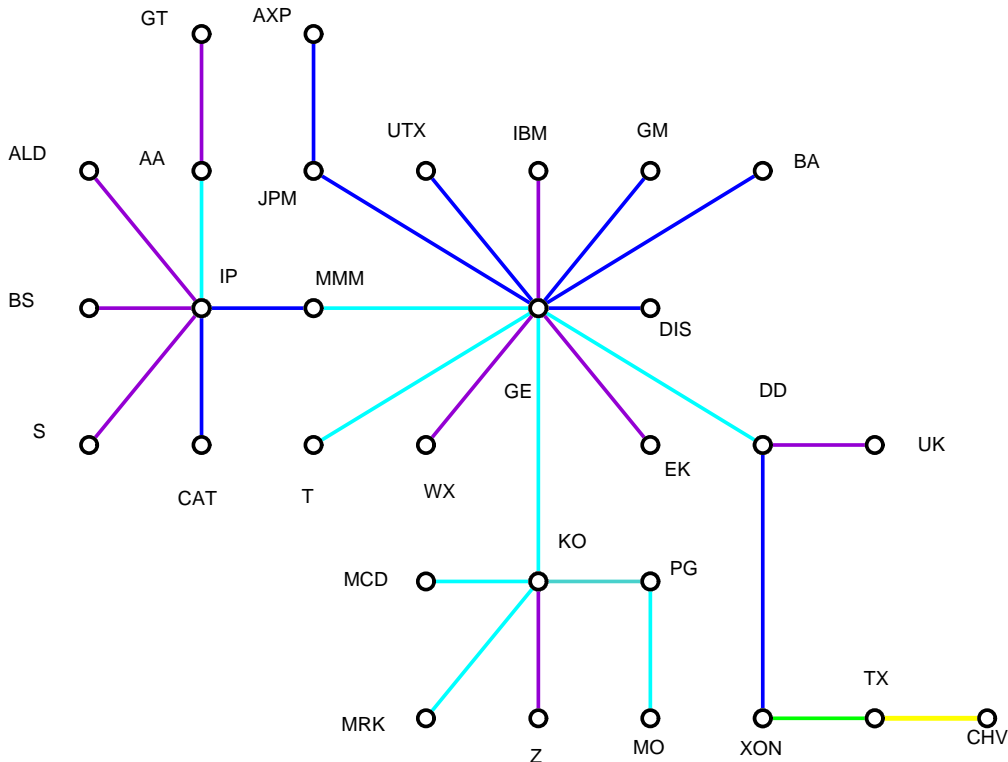


Abbildung 3: Minimaler Spannbaum des DJIA. Jeder Knoten steht für ein Unternehmen, die Farben der Kanten repräsentieren unterschiedliche Abstände (siehe Text). (Abbildung aus [5])

In diesem Baum sind zumindest drei Gruppen von Unternehmen zu erkennen. Um die ökonomische Relevanz dieser Einteilung zu zeigen, vergleicht man die durch die Analyse der Aktienkurse erhaltenen Gruppen mit den Einteilungen in Sektoren und Untersektoren im Forbes 49th Annual Report on American Industry [5].

Am Beispiel des DJIA zeigt sich nun das folgende Ergebnis: Die am engsten verbundene Gruppe wird gebildet von den Knoten CHV, TX und XON (Chevron, Texaco und Exxon; unten rechts in Abbildung 3). Alle Unternehmen gehören zum selben Sektor (Energy) und Untersektor (International Oils). Die Unternehmen der zweiten Gruppe, bestehend aus AA und IP (Alcoa und International Papers;

oben links in der Abbildung), gehören zum selben Sektor (Raw Materials), aber zu verschiedenen Untersektoren (Nonferrous Metals und Paper and Lumber). Die Gruppe um KO und PG (Coca Cola und Procter & Gamble; in der Abbildung unten) schließlich besteht aus Unternehmen ähnlicher Industriesektoren im Bereich Konsumgüter.

Bezüglich größerer und unübersichtlicherer Märkte, wie am Beispiel des S&P 500 untersucht, ist es mit Hilfe dieser Methode möglich, die Unternehmen zunächst nach Teilbäumen, die relativ eng verbunden sind, zu unterteilen und in diesen dann kleinere Gruppen zu untersuchen [5]. Solch eine in Gruppen vergrößerte Auflistung von Unternehmen, sortiert nach ihren Abstandsverhältnissen, wird als *Hierarchie* begriffen.

Die Untersuchungen machen plausibel, dass die gefundene Metrik die tatsächliche ökonomische Nähe repräsentiert. Nimmt man an, dass die am Beispiel gezeigte ökonomische Interpretation allgemein zutrifft, so hat man ein strikt formalisiertes und automatisierbares Instrument entwickelt, um die Nachbarschaftsverhältnisse von Unternehmen *quantitativ* zu erfassen und eine hierarchische Gruppierung vorzunehmen. Die hier vorgestellte Analyse basiert nur auf den Kursdaten der Unternehmen und erlaubt eventuell neue Einblicke in bekannte und erste Erkenntnisse bezüglich neuer Märkte.

Literatur

- [1] E.J. Elton and M.J. Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley and Sons, 1981.
- [2] M.L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, 1991.
- [3] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters. Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83(7):1467, August 1999.
- [4] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L.A.N. Amaral, and H.E. Stanley. Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical Review Letters*, 83(7):1471, August 1999.
- [5] R.N. Mantegna. Hierarchical structure in financial markets. [cond-mat/9802256](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9802256).