Magnetische Monopole

Hergen Schultze
Institut für Theoretische Physik
Bunsenstr. 9
37073 Göttingen

Vortrag im Seminar Quantenmechanik II,
gehalten am 25.5.98

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Warum sollte die Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld bezüglich der Quellen der Felder aufgehoben sein? Im Rahmen der Maxwell-Theorie lassen sich magnetische Ladungen, also Monopole, einführen. Die klassische Beschreibung der Bewegung eines Elektrons im Feld eines magnetischen Monopols führt, unter der Annahme der Drehimpulsquantelung auf die Quantisierungsbedingung von Dirac $eg = n/2$. Dabei ist e die Elementarladung, g die magnetische Polstärke und n eine ganze Zahl. Dies liefert eine Begründung für die sonst rätselhafte Quantisierung der Ladung. Die Formulierung eines elekromagnetischen Potentials erweist sich als problematisch, weswegen eine quantenmechanische Formulierung magnetischer Monopole zunächst nicht für möglich gehalten wurde. Dirac [1][2] zeigt, daß sich das Problem auf ‚natürliche Art und Weise' löst, und man damit zu einer Quantenmechanik eines Elektrons im Feld eines Pols kommt. Die Singularitäten des Potentials identifiziert er mit der

Nullstellenmenge der Wellenfunktion, womit sichergestellt ist, daß das Teilchen die Singularitäten nicht ‚sieht'. Die Quantisierungsbedingung erweist sich als Eigenschaft der Phase der Wellenfunktion an der Nullstelle.

Die experimentelle Situation ist schwierig. Bisher konnten keine magnetischen Monopole nachgewiesen werden. Wenn nicht anders angegeben, werden Einheiten benutzt, in denen $\hbar = c = 1$ ist.

1 Magnetische Monopole in der Maxwell-Theorie

Bekanntlich sind in der konventionellen Theorie der elektromagnetischen Felder Quellen des Magnetfeldes ausgeschlossen. Dieser Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, aus dem Lehrsätze erwachsen wie „Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen." , wird durch kein theoretisches Argument untermauert. Es wird auf die experimentelle Situation verwiesen, wonach bisher keine magnetischen Monopole (oder magnetischen Ladungen) gemessen wurden. Trotzdem darf über ihre Existenz spekuliert werden. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie eine klassische Theorie mit magnetischen Monopolen, und folglich auch mit magnetischen Strömen, aufgestellt werden kann. In diesem Rahmen wird die Symmetrie zwischen elektischem und magnetischem Feld das einzige Argument für die Monopole bleiben.

1.1 Erinnerung an die konventionelle Maxwell-Theorie

Die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= 4\pi\rho_e && (1)\\ \nabla\times\vec{B} &= \partial_t\vec{E} + 4\pi\vec{\jmath}_e && (2)\\ \nabla\vec{B} &= 0 && (3)\\ -\nabla\times\vec{E} &= \partial_t\vec{B} + 0 && (4) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen legen, zusammen mit der Lorentzkraft,

$$\partial_t\vec{p} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{5}$$

die Bewegung elektromagnetisch wechselwirkender Teilchen im Rahmen der Theorie fest. Die Gleichungen sind Lorentz-kovariant, was in der bekannten Viererformulierung offensichtlich wird.

Ein instruktiver Weg, den Feldtensor herzuleiten, besteht darin, die Lorentzkraft in der Viererformulierung zu schreiben:

$$\partial_\tau \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}\vec{K} \\ \vec{K} \end{pmatrix}\gamma = q\begin{pmatrix} \vec{v}\vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \end{pmatrix}\gamma$$

$$= q\begin{pmatrix} \vec{E}\gamma\vec{v} \\ \vec{E}\gamma + \vec{B}\times\gamma(-\vec{v}) \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}^T \\ \vec{E} & \vec{B}\times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\vec{v} \end{pmatrix}$$

Dabei ist τ die Eigenzeit des Teilchens und $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Es gilt also:

$$\partial_\tau p^\mu = qF^{\mu\nu} v_\nu \tag{6}$$

Dies definiert den Feldtensor $F^{\mu\nu}$. Es sei daran erinnert, daß $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\lambda} g_{\lambda\nu}$ mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Das elektromagnetische Potential A^μ wird wie folgt eingeführt:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{7}$$

Um die Maxwell-Gleichungen bequem zu schreiben, definiert man den *dualen Feldtensor* $F^{\dagger\mu\nu}$ durch [3]:

$$F^{\dagger\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^T \\ \vec{B} & -\vec{E}\times \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ der *total antisymmetrische Tensor* mit $\epsilon^{0123} = 1$. Es werden also die Felder gemäß $\vec{E} \to \vec{B}$ und $\vec{B} \to -\vec{E}$ vertauscht.

Nun kann man die *kovariante Form* der Maxwell-Gleichungen angeben.

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -4\pi j^\mu && (8) \\ \partial_\nu F^{\dagger\mu\nu} &= 0 && (9) \end{aligned}$$

1.2 Verallgemeinerung der Maxwell-Theorie

Im Rahmen der klassischen Feldtheorie gibt es für die Existenz magnetischer Monopole nur ein Argument: Symmetrie bezüglich elektrischer und magnetischer Felder. Um diese auch in den Quellen der Felder aufrecht zu erhalten, postuliert man folgende Verallgemeinerung [3],

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -4\pi j^\mu && (10) \\ \partial_\nu F^{\dagger\mu\nu} &= -4\pi k^\mu && (11) \end{aligned}$$

wobei $k^0 = \rho_m$ die magnetische Ladungsdichte und $k^i = j^i_m$ die magnetische Stromdichte sind. In vektorieller Form geschrieben lauten die neuen Gleichungen, die nun auch magnetische Monopole zulassen:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{B} &= 4\pi\rho_m && (12) \\ -\nabla\times\vec{E} &= \partial_t\vec{B} + 4\pi\vec{j}_m && (13) \end{aligned}$$

Die Lorentzkraft auf Teilchen mit einer elektrischen Ladung schreibt sich wie bisher. Dazu passend schreibt sich die Kraft auf ein Teilchen mit einem Pol.

$$\begin{aligned} \partial_\tau p^\mu &= eF^{\mu\nu} v_\nu && (14) \\ \partial_\tau p^\mu &= gF^{\dagger\mu\nu} v_\nu && (15) \end{aligned}$$

In vektorieller Form lassen sich die neuen Gleichungen besser lesen:

$$\partial_t \vec{p} = g(\vec{B} - \vec{v}\times\vec{E}) \tag{16}$$

Die konventionelle Defintion des elektromagnetischen Potentials nach Gl. (7) führt direkt auf Gl. (9). [1] Das heißt aber, daß man für das verallgemeinerte Potential, das magnetische Monopole zuläßt, Gl. (7) modifizieren muß [2].

Man betrachte eine beliebige geschlossene Fläche. Gl. (7) besagt, daß der magnetische Fluß durch diese verschwinden muß. Liegt nun aber ein magnetischer Monopol innerhalb der Fläche, so kann das nicht mehr stimmen. Die Gleichung muß an mindestens einem Punkt auf der Fläche modifiziert werden. Dabei wählt man den einfachsten Fall und geht von einem Punkt aus. Da dieses Argument aber für jede Fläche um den Pol gilt, muß Gl. (7) auf einer Linie, die vom Pol ausgeht und sich bis ins Unendliche (oder bis zu einem anderen Pol mit entgegengesetztem Vorzeichen) erstreckt, verändert werden. Diese Linie nennt man *String*. Seine Lage im Raum ist beliebig und darf keine physikalischen, d.h. beobachtbaren, Konsequenzen haben. Es wird sich später herausstellen, daß die dynamischen Variablen des Strings insofern unphysikalisch sind, als daß verschiedene Lagen des Strings unterschiedlichen Eichungen des elektromagnetischen Potentials entsprechen.

Es ist klar, daß der eindimensionale String in der Raumzeit eine zweidimensionale Fläche (*Sheet*) bildet. Auf allen Sheets, die von anwesenden magnetischen Monopolen erzeugt werden, wird das Potential derart ergänzt, daß der magnetische Fluß, der radial ausgehend vom Pol den Raum erfüllt, durch einen Strom längs des Strings in Richtung des Pols kompensiert wird.

$$F^{\dagger\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda - F^{(f)\dagger\mu\nu} \tag{17}$$

Man benötigt dafür den dualen *fiktiven Feldtensor* $F^{(f)\dagger\mu\nu}$, der überall verschwindet, außer auf den Sheets, wo er durch

$$\partial_\nu F^{(f)\dagger\mu\nu} = +4\pi k^\mu \tag{18}$$

definiert ist. Äquivalente Gleichungen gelten für $F^{\mu\nu}$ und $F^{(f)\mu\nu}$. Anschaulich besteht der String aus einer Aneinanderreihung von magnetischen Dipolen, die auf den Pol gerichtet sind und am Ort des Pols verschwinden.

1.3 Elektron im Feld eines Monopols und Diracs Quantisierungsbedingung

Klassisch läßt sich die Bewegung eines Elektrons, es soll hier als verallgemeinerbares Beispiel für ein elektrisch geladenes Teilchen dienen, einfach beschreiben [3]. Das Magnetfeld eines ruhenden Monopols mit der Polstärke g ist gegeben durch:

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r} \tag{19}$$

Nach Gl. (14) ist Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$m\ddot{\vec{r}} = e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \tag{20}$$

[1] $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\lambda} + \partial_\mu F^{\lambda\nu} + \partial_\lambda F^{\nu\mu} \Leftrightarrow \partial_\nu F^{\dagger\mu\nu}$

Die Kraft ist nicht kugelsymmetrisch. Es ist also auch nicht zu erwarten, daß der Drehimpuls des Elektrons erhalten ist. Die Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist aber bemerkenswerter Weise unabhängig von der Bewegung: [2]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_t(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) &= \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} && (21)\\
&= \frac{eg}{r^3}(\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})) && (22)\\
&= eg\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\left(\vec{r}\dot{\vec{r}}\right)}{r^3}\right) && (23)\\
&= \mathrm{d}_t(eg\hat{r}) && (24)
\end{aligned}$$

Man definiert daraufhin den erhaltenen *Gesamtdrehimpuls*:

$$\vec{J} = \vec{L} - eg\hat{r} \tag{25}$$

Der zweite Term resultiert aus dem elekromagnetischen Feld, das der Pol und das Elektron aufbauen. Um das zu beweisen, betrachte man das Elektron am Ort $\vec{r} = 0$ und den magnetischen Pol bei $\vec{r} = \vec{R}$. Es wird sich zeigen, das das Ergebnis unabhängig vom Abstand der beiden Teilchen ist. Die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes ist durch den Poyntingvektor $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/4\pi$ gegeben. Der Drehimpuls $\vec{L}_{em}$ ergibt sich also zu: [3]

$$\begin{aligned}
4\pi\vec{L}_{em} &= \int \mathrm{d}^3r \left(\vec{r} \times \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right) && (26)\\
&= e\int \mathrm{d}^3r \left(\vec{r} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{B}\right)\right) && (27)\\
&= -e\int \mathrm{d}^3r \left(\frac{1}{r}\left(\vec{B} - \hat{r}\left(\hat{r}\vec{B}\right)\right)\right) && (28)\\
&= -e\int \mathrm{d}^3r \left(\vec{B}\nabla\right)\hat{r} && (29)\\
&= e\int \mathrm{d}^3r \left(\hat{r}\left(\nabla\vec{B}\right)\right) && (30)\\
&= e\int \mathrm{d}^3r \left(\hat{r}\left(4\pi g\delta(\vec{r} - \vec{R})\right)\right) && (31)\\
\Rightarrow \vec{L}_{em} &= eg\hat{R} && (32)
\end{aligned}$$

Von (29) nach (30) wurde partiell integriert, wobei der Randterm im Unendlichen verschwindet. Aus der Erhaltung von $\vec{J}$ schließt man darauf, daß sich das Elektron auf einem Zylinder mit der Achse $-\vec{J}$ und dem halben Öffnungswinkel $\arccos(eg/J)$ bewegt.

---

[2] $\mathrm{d}_t\hat{r} = \mathrm{d}_t\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{1}{r^2}\vec{r}\dot{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{r}})}{r^3}$

[3] $(\vec{B}\nabla)\hat{r} = (\vec{B}\nabla)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{B}}{r} - \frac{1}{r^2}\vec{r}(B_x x + B_y y B_z z) = \frac{1}{r}(\vec{B} - \hat{r}(\hat{r}\vec{B}))$

Die Radialkomponente von $\vec{J}$ beträgt:

$$\hat{r}\vec{J} = -eg \tag{33}$$

In der Quantenmechanik erwartet man, daß die Komponenten des Drehimpulses in halbzahlige Vielfache (für Fermionen) gequantelt sind. Danach ist Diracs Quantisierungsbedingung

$$\boxed{eg = \tfrac{1}{2}n} \tag{34}$$

plausibel. Dies kann natürlich noch nicht als Beweis gelten. Ein wesentlich besseres Argument für den obigen Zusammenhang folgt im nächsten Abschnitt. Die Tragweite dieser Gleichung soll hier noch einmal betont werden. Aus der bloßen Existenz eines Teilchens mit einem magnetischen Monopol der Stärke g würde folgen, daß es eine kleinste elektrische Ladung der Stärke $e = n_0/2g$ gibt und alle Ladungen auf der Welt gequantelt sind. Das gleiche Argument gilt natürlich auch in die andere Richtung. Welchen Wert n_{00} annimmt, das die kleinste elektrische mit der kleinsten magnetischen Ladung koppelt, kann die Theorie nicht vorhersagen.

2 Monopole in der Quantenmechanik

Man kann mit dem bis hierher gewonnenen Wissen eine Quantenmechanik formulieren, die magnetische Monopole zuläßt. Die Existenz solcher Pole muß bei dieser Herangehensweise jedoch einfach postuliert werden. Dabei nutzt man die Eichfreiheit des Potentials, ausgedrückt durch $A^{\mu\prime} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi$, und die Eindeutigkeit der Wellenfunktion um Diracs Quantisierungsbedingung für die Ladung zu beweisen.

Dirac selbst geht einen etwas anderen Weg und sucht einen allgemeineren Zugang. Er nutzt die Eigenschaften der Phase der Wellenfunktion, um auf ‚natürliche Art und Weise' auf die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Potential zu stoßen. Dabei findet er Singularitäten des elektromagnetischen Feldes, die sich als magnetische Monopole identifizieren lassen. Aus der Eindeutigkeit der Wellenfunktion folgt auch hier die Quantisierungsbedingung für die Ladung. Diracs Gedanken sollen hier nachvollzogen werden [1].

2.1 Quantensingularität im elektromagnetischen Feld

Man betrachte den quantenmechanischen Zustand ψ eines Systems und schreibe ihn in der Polardarstellung

$$\psi = R\mathrm{e}^{i\gamma} \tag{35}$$

mit den reellen Funktionen R und γ, die von den Raumzeitvariablen abhängen. ψ selbst hat keine direkte physikalische Bedeutung, wohl aber die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^{\star}\psi$. Für diese Größe ist die *Phase* γ beliebig. So frei ist die Wahl der Phase im allgemeinen aber nicht.

Man betrachte dazu das Skalarprodukt zweier beliebiger Wellenfunktionen ϕ und ψ (im Ortsraum),

$$\int \mathrm{d}^3 r \phi^\star \psi \tag{36}$$

dessen Betragsquadrat physikalische Bedeutung hat, nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß beide Zustände übereinstimmen. Variiert man die Ortsvariablen des Integranden längs einer geschlossenen Kurve, sollte sich die physikalische Realität nicht ändern. Das bedeutet, daß der Phasenunterschied von $\phi^\star\psi$ längs jeder geschlossenen Kurve verschwinden muß, da er sonst den Wert des Integrals ändern würde. Anders gesagt: *Der Phasenunterschied längs einer geschlossenen Kurve muß für alle Wellenfunktionen der gleiche sein.* Diese Aussage läßt trotzdem noch einen additiven Term der Form $2\pi n$ (n eine ganze Zahl) zu.

Nun betrachte man wieder den Zustand ψ, diesmal ausgedrückt durch:

$$\psi = \tilde{\psi} \mathrm{e}^{i\beta} \tag{37}$$

Die Phase von $\tilde{\psi}$ sei an jedem Ort und zu jeder Zeit gegeben. Die Unbestimmtheit der Phase der Wellenfunktion stecke in β. Dieses kann also nicht mehr vom Ort abhängen. Die Ableitungen von β nach den Raumzeitvariablen bringt man mit dem Phasenunterschied längs einer geschlossenen Kurve in Zusammenhang. Deshalb bekommen sie einen Namen:

$$\kappa_\mu = \partial_\mu \beta \tag{38}$$

Die Phasendifferenz $\Delta\beta$ längs einer geschlossenen Kurve C im Raum, betrachtet zu einem beliebigen Zeitpunkt, die eine Fläche A umrandet, kann man folgendermaßen schreiben:

$$\Delta\beta = \oint_C \mathrm{d}s^\mu \kappa_\mu = \oint_C \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{\kappa} = \int_A \mathrm{d}\vec{S}(\nabla \times \vec{\kappa}) \tag{39}$$

Dabei nutzt man $\mathrm{d}s^0 = 0$ (Raumkurve) und den Satz von Stokes. Man sieht, daß $\nabla \times \vec{\kappa}$ den Phasenunterschied bereits festlegt. κ ist demnach nur bis auf eine Transformation der Form

$$\vec{\kappa}' = \vec{\kappa} + \nabla\tilde{\chi} \tag{40}$$

mit einer skalaren Funktion $\tilde{\chi}$ festgelegt. Diese Freiheit in der Wahl von κ entspricht der Addition von $\tilde{\chi}$ zu β. Man kann also für alle Wellenfunktionen das gleiche β wählen (muß es sogar bis auf die additive Konstante) und demnach jeden Zustand wie in Gl. (37) darstellen. Man sieht sofort, wie ein Differenzieroperator auf ψ wirkt:

$$-i\partial_\mu \psi = \mathrm{e}^{i\beta}(-i\partial_\mu + \kappa_\mu)\tilde{\psi} \tag{41}$$

ψ erfülle die Schrödingergleichung für freie Teilchen ($m = 1/2$):

$$i\partial_t \psi = (-i\nabla)^2 \psi \tag{42}$$

Dann erfüllt $\tilde{\psi}$ die folgende Gleichung:

$$i\partial_t \tilde{\psi} = ((-i\nabla + \vec{\kappa})^2 + \kappa_0)\tilde{\psi} \tag{43}$$

Spätestens hier sieht man den Zusammenhang zwischen κ_μ und dem elektromagnetischen Potential A_μ. $\tilde{\psi}$ erfüllt nach Gl. (43) die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Ladung e im Potential:

$$\vec{A} = -\frac{\vec{\kappa}}{e} \tag{44}$$

$$\varphi = \frac{\kappa_0}{e} \tag{45}$$

Damit ist

$$\nabla \times \vec{\kappa} = -e\vec{B} \qquad -\nabla\kappa_0 + \partial_t\vec{\kappa} = e\vec{E} \tag{46}$$

und die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf ein geladenes Teilchen kann mit dem Phasenfaktor $\mathrm{e}^{i\beta}$ in obiger Art und Weise beschrieben werden. Dies rückt die Quantenmechanik geladener Teilchen in ein neues Licht und liefert sogar die Begründung für ein neues Phänomen, das Dirac eine *quantisierte Singularität im elektromagnetischen Feld* nennt und den magnetischen Monopolen entspricht. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Nach Gleichung (39) und (46) ist der Phasenunterschied $\Delta\beta$ proportional zum elektromagnetischen Fluß durch eine Fläche A, die von der Kurve C umrandet wird. Um die letzte Unbestimmtheit in $\Delta\beta$ für verschiedene Wellenfunktionen, nämlich ein additiver Term der Form $2\pi n$, zu eliminieren, denkt man sich die Kurve sehr klein, d.h. man zieht sie zu einem Punkt zusammen. Nimmt man ψ als stetig an, so muß auch $\Delta\beta$ klein werden und kann sich für verschiedene Wellenfunktionen *nicht* mehr um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden.

Die Argumentation mit der Phase der Wellenfunktion funktioniert nun nicht mehr an einer Nullstelle von ψ, denn die komplexe Null kann jede Phase haben. (Anders gesagt: Es macht keinen Sinn, von einer Phase zu sprechen.) Die Menge der Nullstellen von ψ ergibt im dreidimensionalen Raum im allgemeinen eine Linie (String). (Das liegt daran, daß die Nullstelle einer komplexen Funktion von zwei Bedingungen festgelegt wird, und diese im dreidimensionalen Raum i.a. eine Linie definieren.) Liegt dieser String innerhalb von C, kann man nicht mehr davon ausgehen, daß $\Delta\beta$ klein ist, weil β auf dem String völlig beliebig ist. Wegen der oben gezeigten Eindeutigkeit darf der Unterschied aber nur ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Diese Zahl kann man als Eigenschaft des Strings verstehen, wobei das Vorzeichen vom Umlaufsinn abhängt. Diesen kann man aber wiederum mit einer Richtung auf dem String identifizieren.

Für die Phasendifferenz gilt demnach (siehe Gl. (39) und (46)):

$$\Delta\beta = 2\pi n - e\int_A \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B} \tag{47}$$

Der eventuell vorhandene elektrische Fluß spielt für $\Delta\beta$ keine Rolle. Dieses Argument läßt sich bis auf beliebig große Kurven fortsetzen, wobei dann natürlich über alle Strings innerhalb der Kurve summiert werden muß:

$$\Delta\beta = 2\pi \sum_{Strings} n - e\int_A \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B} \tag{48}$$

Folgt man der Kurve einmal herum und läuft wieder zurück, so ist $\Delta\beta = 0$ und das Integral beschreibt den magnetischen Fluß durch eine geschlossene Fläche $A + \bar{A}$. Es gilt also:

$$2\pi \sum_{Strings} n = +e \oint_{A+\bar{A}} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} \tag{49}$$

Man betrachte zunächst nur einen String. Durchdringt dieser die geschlossene Fläche ohne innerhalb dieser zu enden, so durchdringt er sie eine gerade Anzahl Male und jedes zweite Mal mit einem anderen Vorzeichen von n. Die Summe über solche Strings ist null. Endet aber ein String innerhalb von $A + \bar{A}$, so durchdringt er die Fläche eine ungerade Anzahl Male, wieder jeweils mit anderem Vorzeichen, und gibt einen Beitrag n zur Summe. Die Endpunkte von Strings sind die magnetischen Monopole. Die obige Bedingung muß also lauten:

$$2\pi \sum_{Pole} n = e \oint_{A+\bar{A}} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} \tag{50}$$

Das Vorzeichen ist so gewählt, daß n positiv ist, wenn der String in die Fläche hinein gerichtet ist. Für den Fall, daß die Fläche genau einen Pol umschließt, folgt mit der Definition der *Polstärke* g (ganz analog zur Definition der elektrischen Ladung)

$$\oint_{Pol} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} = 4\pi g \tag{51}$$

Diracs Quantisierungsbedingung

$$\boxed{eg = \tfrac{1}{2}n} \tag{52}$$

Die Theorie ‚erlaubt' also der Natur die Existenz magnetischer Monopole. *„Under these circumstances one would be surprised if Nature had made no use of it."* [1]

2.2 Elektron im Feld eines Monopols

Die sehr abstrakten Gedanken des letzten Abschnitts sollen nun anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden. Um möglichst anschaulich zu bleiben, wird das Problem aus Abschnitt 1.3, das Elektron im Feld eines magnetischen Monopols, aufgegriffen und quantenmechanisch gelöst. Insbesondere wird untersucht, ob es gebundene Zustände geben kann. Dabei wird ein Pol mit $n = 1$, also einer Stärke von $g = 1/2e$, betrachtet.

Der Ansatz für die Wellenfunktion ψ des Elektrons lautet

$$\psi = \tilde{\psi} \mathrm{e}^{i\beta} \tag{53}$$

mit den gleichen Bedingungen an $\tilde{\psi}$ und β wie im vorherigen Abschnitt. Das magnetische Feld des Pols beschreibt Gl. (19), an die hier noch einmal erinnert sei:

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r} \tag{54}$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems geht man zu Kugelkoordinaten über. Ein mögliches Potential diese Feldes ist:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g\frac{1-\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tan(\theta/2)}{2er}\vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \vec{\kappa} \end{pmatrix} \tag{55}$$

Daß diese Wahl die Coulombeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ respektiert, sieht man ein wenn man bedenkt, daß κ_μ nur eine Komponente in ϕ-Richtung hat, die wiederum nur von θ und r abhängt. Dabei wird κ entlang der $(\theta = \pi)$-Achse singulär, und zwar derart, daß das Kurvenintegral von κ_μ um die Singularität 2π ergibt. Auf diese Achse legt man auch den String der Nullstellen von ψ. Die Freiheit, diesen String (übereinstimmend mit der Singularität in $\kappa_\mu \propto A_\mu$) beliebig zu legen, entspricht der Eichfreiheit des Potentials.

Bei der quantenmechanischen Beschreibung geht man nun von der Schrödingergleichung freier Teilchen ($m = 1/2$) in einem stationären Zustand mit Energie E aus:

$$-\Delta\psi = E\psi \tag{56}$$

$$\Rightarrow -[\Delta + 2i(\vec{\kappa}\cdot\nabla) - \kappa^2]\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \tag{57}$$

Man beachte, daß ∇ und $\vec{\kappa}$ wegen der Coulombeichung vertauschen. Es gilt:

$$\vec{\kappa}\cdot\nabla = \frac{\kappa_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi = \frac{1}{2r^2(1+\cos(\theta))}\partial_\phi \tag{58}$$

$$\kappa^2 = \kappa_\phi^2 = \frac{\tan^2(\theta/2)}{4r^2} \tag{59}$$

Daraus folgt die Schrödingergleichung für ein Elektron im Feld eines Pols in voller Länge:

$$\begin{aligned} -\Bigg[\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta + & \\ \frac{i}{r^2(1+\cos(\theta))}\partial_\phi - \frac{\tan^2(\theta/2)}{4r^2}\Bigg]\tilde{\psi} &= E\tilde{\psi} \end{aligned} \tag{60}$$

Man löst sie mit dem Separationsansatz

$$\tilde{\psi} = f(r)Y(\theta,\phi) \tag{61}$$

der auf folgende Gleichung führt:

$$\begin{aligned} Y\left[\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right]f + \frac{f}{r^2}\Bigg[\frac{1}{\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 + \partial_\theta^2 + \cot(\theta)\partial_\theta + & \\ \frac{i}{1+\cos(\theta)}\partial_\phi - \frac{\tan^2(\theta/2)}{4}\Bigg]Y &= -E(fY) \end{aligned} \tag{62}$$

Das ist äquivalent zum Gleichungssystem:

$$\left[\frac{1}{\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 + \partial_\theta^2 + \cot(\theta)\partial_\theta + \frac{i}{1+\cos(\theta)}\partial_\phi - \frac{\tan^2(\theta/2)}{4}\right] Y = -\lambda Y \quad (63)$$

$$\left[\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{\lambda}{r^2}\right] f = -Ef \quad (64)$$

wobei $(-\lambda)$ der Eigenwert des Differentialoperators der Winkelvariablen aus Gl. (63) ist.

Man betrachte zuerst die Differentialgleichung für den Radialanteil und stelle die Frage: *Kann es gebundene Zustände geben?* Die Antwort lautet: *Nein!* Dazu vergleiche man Gl. (64) z.B. mit der für den Radialanteil der Wellenfunktion für das Wasserstoffatom. Der für die Bindung verantwortliche Potentialterm fehlt hier gänzlich. Das Vektorpotential des Pols gibt nur einen Beitrag zum Drehimpuls.

Es soll an dieser Stelle angemerkt sein, daß man die Frage nach gebundenen Zuständen differenzierter betrachten kann. So konnte gezeigt werden, daß ein nichtverschwindenes anomales magnetisches Moment des zu bindenen Teilchens, wie es z.B. Protonen besitzen, lokalisierte Zustände ermöglicht (Y. Kazama, C.N. Yang, Phys. Rev. D 15, 2301 (1977)). Auch ein zusätzliches $1/r$-Potential des Teilchens, das den magnetischen Monopol trägt, erlaubt gebundene Zustände (G.F. Torres des Castillo, L.C. Cortès-Culautl, J. Math. Phys. 38, 2996 (1997)). Der Spin des Elektrons richtet sich dann parallel oder antiparallel zur $\hat{r}$-Richtung aus. Aufgrund der Symmetrie des Magnetfeldes ist das nicht verwunderlich, aber trotzdem ein ungewohntes Phänomen. In beiden Artikeln wird die Diracgleichung zur Beschreibung des Teilchens benutzt.

Zurück zum Problem des nichtrelativistischen Elektrons im Feld eines Pols, und zwar zum Winkelanteil der Wellenfunktion. Der kleinste Eigenwert von Gl. (63) ist $\lambda = 1/2$. Die beiden unabhängigen Eigenfunktionen lauten:

$$Y_1 = \cos(\theta/2) \quad (65)$$

$$Y_2 = \sin(\theta/2)e^{i\phi} \quad (66)$$

Die Strings (Nullstellen von ψ) verlaufen für Y_1 bei $\theta = \pi$ und für Y_2 bei $\theta = 0$. Dies ist kein Problem wegen der schon mehrmals erwähnten Freiheiten bezüglich der Orte des Strings.

3 Experimentelle Situation

Am Anfang dieses Kapitels soll zu anschaulichen physikalischen Einheiten übergegangen werden. Es wird das Gauß'sche System gewählt, weil dort das elektrische und das magnetische Feld die gleichen Einheiten besitzen, und somit auch die magnetische Polstärke g in Einheiten der Ladung gemessen wird. Diracs Quantisierungsbedingung lautet dann:

$$\boxed{eg = \tfrac{1}{2}n\hbar c} \quad (67)$$

$$[\hbar] = \mathrm{erg} \cdot \mathrm{sec} = \frac{\mathrm{esu}^2}{\mathrm{cm}} \cdot \mathrm{sec}$$

$$\Rightarrow [\hbar c] = \mathrm{esu}^2 \Rightarrow [g] = \mathrm{esu}$$

Nimmt man an, daß die Ladung des Elektrons ($e \approx 4.8 \cdot 10^{-10}\mathrm{esu}$) die kleinste elektrische Ladung ist, so folgt für den schwächsten Pol aus der Kenntnis der Feinstrukturkonstante ($e^2/\hbar c \approx 1/137$):

$$g = \frac{\hbar c}{2e} = \frac{1}{2}\frac{\hbar c}{e^2} e \approx \frac{137}{2} e \tag{68}$$

$$\Rightarrow g \approx 3.3 \cdot 10^{-8}\mathrm{esu} \tag{69}$$

Das bedeutet, daß Wechselwirkungen mit magnetischen Polen ungleich stärker sind als solche mit elektrischen Ladungen.

3.1 Wie sicher ist die Null?

Es stellt sich die Frage, ob die verallgemeinerten Gleichungen nicht bisherigen Experimenten widersprechen. Welche Auswirkungen hat die Einführung magnetischer Ladung? Dazu ist anzumerken, daß es im Rahmen der konventionellen Maxwell-Theorie Ansichtssache ist, ob ein Teilchen elektrische oder magnetische Ladung trägt, solange nur das Verhältnis zwischen elektricher und magnetischer Ladung für alle Teilchen konstant ist [4]. Man betrachte folgende *duale Transformation*:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\jmath}_e \\ \vec{\jmath}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\jmath}\,'_e \\ \vec{\jmath}\,'_m \end{pmatrix}$$

Die Definition des dualen Tensors im ersten Abschnitt erweist sich als der Spezialfall $\phi = \pi/2$ dieser Transformation. Die verallgemeinerten Maxwellgleichungen sind invariant unter dualer Transformation. Sei nun $\rho_m/\rho_e = C$ für alle Teilchen angenommen, dann überführt die Transformation mit

$$\tan\phi = C \tag{70}$$

die verallgemeinerten Gleichungen in die spezielle Form mit $\rho_m = 0$. Man findet einen anderen Wert für ϕ, unter dem $\rho_e = 0$ wird. Es ist also Konvention zu sagen, das Elektron besitze die elektrische Ladung $(-e)$ und keine magnetische. Folgt man aber dieser Konvention, so kann man leicht eine obere Schranke für die magnetische Ladung anderer Teilchen der üblichen Materie finden, oder anders gesagt, für die Tatsache, daß das Verhältnis bei allen Teilchen das gleiche ist. Aus dem geringen

Magnetfeld der Erde (ca. 1 Gauß) läßt sich folgende obere Schranke für Nukleonen, also Protonen und Neutronen, finden [5]:

$$g(Nukleon) \leq 2 \cdot 10^{-24} e \approx 9.6 \cdot 10^{-34} \mathrm{esu} \tag{71}$$

Es kann also ausgeschlossen werden, daß normale Materie magnetische Pole trägt. Für instabile Materie gibt es keine solch einfache Abschätzung.

3.2 Suche nach magnetischen Monopolen

Bei dem Versuch magnetische Monopole nachzuweisen muß man hochenergetische Teilchenreaktionen betrachten, bei denen neue instabile Partikel entstehen. Die einfachste Reaktion ist die Paarerzeugung aus der (starken) Wechselwirkung zweier Protonen.

$$pp \longrightarrow pp + g^+ g^- \tag{72}$$

Nun steht man vor dem folgenden Problem: Die Wirkungsquerschnitte solcher Reaktionen sind von der Masse der Teilchen, die einen magnetischen Pol tragen, (kurz Pol genannt) abhängig. Über die Masse des Pols macht die Theorie aber keine Aussage. Um nun für die Spekulationen einen Anhaltspunkt zu haben, definiert man sich die *Referenzmasse* m_n des Pols aus der Annahme, der klassische Elektronenradius und der klassische Polradius seien gleich [5]:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{g_n^2}{m_n c^2} = r_g \tag{73}$$

$$\Rightarrow m_n = \left(\frac{g_n}{e}\right)^2 m_e \approx n^2 \cdot 2.56 m_p \tag{74}$$

Die Aufgabe besteht also darin, stark geladene Teilchen mit großer Masse zu erzeugen und nachzuweisen.

Dazu bedient man sich einerseits Teilchenbeschleuniger (viele Ereignisse – geringe Energie) in Laborexperimenten und andererseits der kosmischen Strahlung (wenig Ereignisse – hohe Energie). Diese sollte in der Atmosphäre g^+g^--Paare erzeugen, die Spuren in Gesteinen mit magnetischen Eigenschaften (z.B. am Grund der Ozeane) hinterlassen. Für die experimentellen Details sei auf den Übersichtsartikel von Amaldi und die Fachartikel verwiesen. Die Experimente liefern obere Schranken für den Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung. Deshalb muß als Vergleich der erwartete, aus groben Abschätzungen hervorgegangene, Wert angegeben werden:

$$\sigma_g(pp \longrightarrow pp + g^+ g^-) \sim 10^{-33} \left(\frac{m_n}{m_g}\right)^2 \mathrm{cm}^2 \tag{75}$$

Beschleunigerexperimente Mitte der 60er Jahre ergaben für $n = 1, 2$ und $m_g \leq 3m_p$ eine obere Grenze von

$$\sigma_g^{95\%}(pp \longrightarrow pp + g^+ g^-) \approx 10^{-40} \mathrm{cm}^2 \tag{76}$$

Das liegt schon weit unter dem erwarteten Wert. Die Suche nach Spuren im Gestein des Ozeanbodens führt auf noch weiterreichende Grenzen. So war man in der Lage, Pole bis zu $n = 60$ zu registrieren und für den Wirkungsquerschnitt folgende Schranken anzugeben:

$$\sigma_g^{90\%}(pN \longrightarrow pN + g^+g^-) \approx 10^{-42}\text{cm}^2 \qquad (m_g = m_p) \tag{77}$$

$$\sigma_g^{90\%}(pN \longrightarrow pN + g^+g^-) \approx 10^{-34}\text{cm}^2 \qquad (m_g = 1000m_p) \tag{78}$$

Dabei wurde das Spektrum der kosmischen Strahlung bis zu einer Energie von 10^{19} eV untersucht. Das Resultat war: „No tracks of any particle were seen. The background was zero.“ ! (R.L. Fleischer et al., Phys. Rev. 184, 1393 (1969))

4 Schlußfolgerungen

Die in diesem Vortrag präsentierten theoretischen Argumente aus der Maxwelltheorie und der Quantenmechanik (erste Quantisierung) lassen die Existenz magnetischer Monopole ausdrücklich zu. Aus Gründen der Ästhetik erwartet man, daß solche Pole existieren und nicht ‚zufällig $n = 0$‘ ist. Aus dem bekannten Wert für die Feinstrukturkonstante folgt einerseits, daß die elektromagnetische Wechselwirkung mit Polen wesentlich stärker ist als die mit elektrischen Ladungen und andererseits, daß man für einen Pol eine hohe Masse erwartet. Die Experimente können in diesen Bereich vordringen, sind aber mit Vorsicht zu interpretieren, da doch grobe Abschätzungen und vereinfachende Annahmen gemacht werden. Trotzdem lassen sie einen an der Existenz Dirac'scher Monopole zweifeln.

Literatur

[1] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 133, 60 (1931)

[2] P.A.M. Dirac, Phys. Rev. 74, 883 (1948)

[3] P. Goddard, D.I. Olive, Rep. Progr. Phys. 41, 1357 (1978)

[4] J.D. Jackson, „Klassische Elektrodynamik“ , de Gruyter, Berlin (1983)

[5] E. Amaldi, „On the Dirac Magnetic Poles“ in G.Puppi, „Old and New Problems in Elementary Particles“ , Academic Press, N.Y. (1968)